

Varianta 7

Subiectul I

- a) $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$.
- b) $a = 3, b = -2$.
- c) $\overline{2 + 5i} = 2 - 5i$.
- d) $i^1 \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{10} = -i$.
- e) $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
- f) P este mijlocul segmentului $(MN) \Rightarrow x_p = 3, y_p = 5$.

Subiectul II

1.

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + 37 = 703$.
- b) $\log_2 8 = 3$.
- c) $p = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.
- d) $x = -1$.
- e) $(f \circ f)(1) = 1$.

2.

- a) $f'(x) = e^x$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e$.
- c) $\int_0^1 f(x) dx = e - 1$.
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{f(x)} = 0$.

Subiectul III

- a) $A^2 = O_2$.
- b) Prin calcul direct rezultă $A^2 + A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.
- c) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

d) $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2 \Leftrightarrow I_2 + aA + A + aA^2 = I_2 \Leftrightarrow (a+1)A = O_2 \Rightarrow a = -1.$

e) Din **a)** rezultă $\det(I_2 + A^2) = \det I_2 = 1.$

f) f se divide cu polinomul $X - 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$, adevărat prin calcul.

g) Din teorema împărțirii cu rest rezultă că $g = f \cdot q + aX + b \Leftrightarrow$

$$g = (X + 2)(X - 1) \cdot q + aX + b.$$

Pentru $x = -2$, respectiv $x = 1$ se obține $a = \frac{1 - 2^{100}}{3}$, $b = \frac{2 + 2^{100}}{3}$, deci

$$r = \frac{1 - 2^{100}}{3} X + \frac{2 + 2^{100}}{3}.$$

Subiectul IV

a) Prin calcul $f(x) - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0.$

b) $f'(x) = \left(\frac{1}{(x+1) \cdot (x+2)} \right)' = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}.$

c) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} < 0, (\forall) x \in [0, \infty)$, deci funcția f este descrescătoare pe $[0, \infty)$.

d) Ecuațiile asimptotelor verticale sunt $x = -2$, respectiv $x = -1.$

e) Din **a)** rezultă $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ și deci $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(1) + f(2) + \dots + f(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}.$

g) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \frac{4}{3}.$